

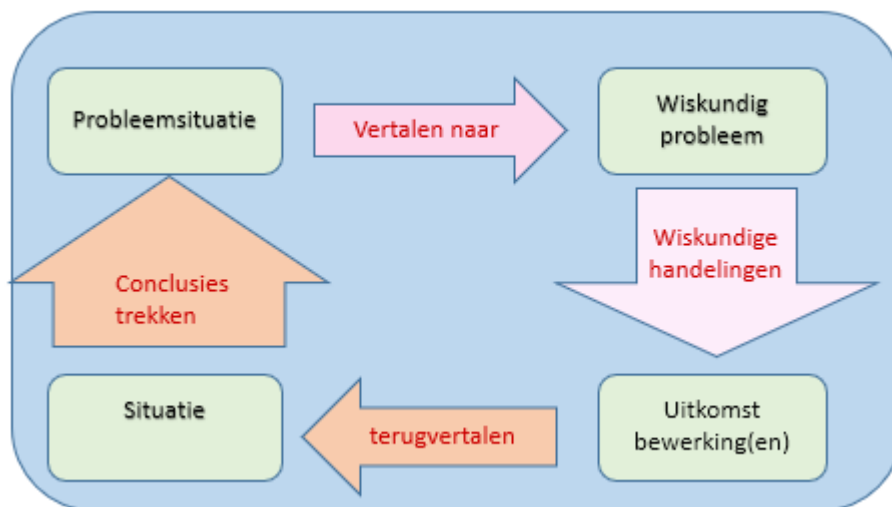
Een “problem solving” en “modeling” herontwerp

Examen VWO

2021

tijdvak 1
maandag 17 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde A



Vrije vertaling van: OECD. (2014). *PISA 2015 draft mathematics Framework*. Retrieved from Paris, France: <http://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/pisa2015draftframeworks.htm>

Samenstelling:

© Kees Hoogland, Hogeschool Utrecht, september 2021

Met bijdragen van Sjuup Rekko en Marco ten Hoff

Ronde getallen en Linkshandigheid

10 500 700 90000

Achtergrondinformatie

Rond of mooi getal

Een getal dat eindigt op een nul zoals bijv. 100 of 250 wordt vaak als mooier of ronder ervaren dan bijv. een getal als 35 of 71. Maar hoeveel ronder of mooier is het ene getal ten opzichte van het andere?

Rondheid van een getal

De rondheid (R) van een getal hangt af of het getal een veelvoud is van machten van 10, of van helften of kwarten van machten van 10.

Om de rondheid van een getal te kunnen berekenen, gebruiken we de formule van Sigurd.

Wiskundig model: formule van Sigurd

Formule van Sigurd

$$R(n) = \frac{1000}{n} + \frac{100}{n} + \frac{10}{n} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{500}{n} + \frac{50}{n} + \frac{5}{n} \right) + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{250}{n} + \frac{25}{n} \right)$$

Elke term $\frac{\dots}{n}$ telt alleen mee als n een veelvoud van de teller is.

R is geldig voor getallen n van 20 tot 1000

Zo geldt bijvoorbeeld voor het getal 600:

$$R(600) = \frac{\cancel{1000}}{\cancel{600}} + \frac{100}{600} + \frac{10}{600} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\cancel{500}}{\cancel{600}} + \frac{50}{600} + \frac{5}{600} \right) + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\cancel{250}}{\cancel{600}} + \frac{25}{600} \right) \approx 0,24$$

Rondheid van de honderdtallen tussen 500 en 1000, vereenvoudigd model:

$$R = \frac{23}{16p}$$

Probleemstelling

Deze wiskundig modellen geven een maat voor de rondheid van een getal.
Welk model past het best bij een vraagstelling?

Opdrachten

1. Bepaal met de formule van Sigurd welk getal het rondst is: et getal 650 of 700.
2. Leidt het vereenvoudigde model af uit de formule van Sigurd.
3. Maak met behulp van het vereenvoudigd model aannemelijk – zonder getallenvoorbeeld – dat de rondheid afneemt als het honderdtal groter wordt.

Linkshandigen en ronde getallen

Achtergrondinformatie

Er is een vermoeden dat linkshandigen eerder geneigd zijn voor rondere getallen te kiezen dan rechtshandigen. Hiervoor is een onderzoek opgezet.

Onderzoek

Deelnemers aan het onderzoek kregen elk 60 vragen voorgelegd, waarop het antwoord een geheel getal is.

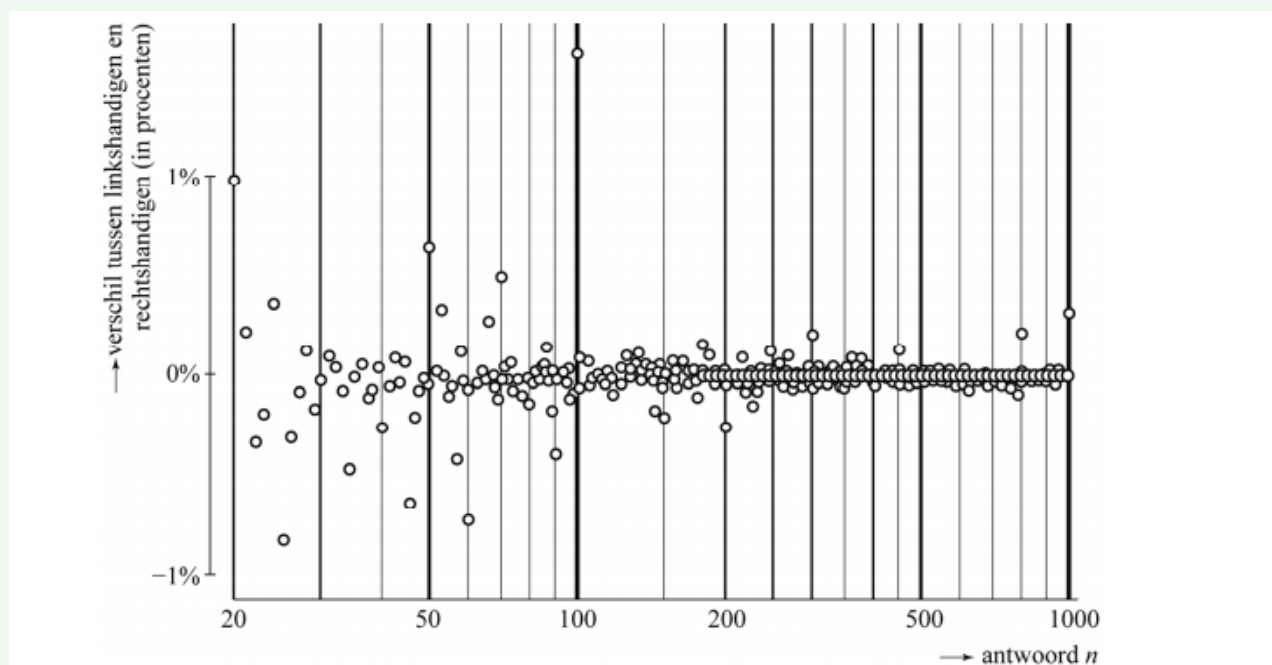
De vragen waren bijvoorbeeld:

- Hoeveel knopen heb je in je klerenkast?
- Hoeveel diersoorten kun je noemen?
- Hoeveel eieren heb je vorig jaar gegeten?

Aan het onderzoek deden 200 deelnemers mee. Iedere deelnemer beantwoordde 60 vragen met een geheel getal.

Door linkshandigen werden 3412 antwoorden gegeven tussen 20 en 1000.

Door rechtshandigen werden 4329 antwoorden gegeven tussen 20 en 1000.



Figuur 1. Verschil tussen links- en rechtshandigen in geven van antwoord n

Probleemstelling

Hoe kan het vermoeden worden getoetst?

De tabel nader bekeken:

6,7% van de 3412 antwoorden van de linkshandigen betrof het getal 20.

5,7% van de 4329 antwoorden van de rechtshandigen betrof het getal 20.

In figuur 1 staat daarom bij het getal 20 een stip op een hoogte van 1%.

Opdracht

We checken twee uitspraken die het vermoeden nader onderzoeken.

1. Naarmate getallen groter worden, worden ze minder vaak gekozen.
2. Grote getallen worden procentueel bijna even vaak door de linkshandigen als door de rechtshandigen als antwoord gegeven

Leg voor elk van deze uitspraken uit of deze wel of niet uit de figuur volgt.

Draaiend huis

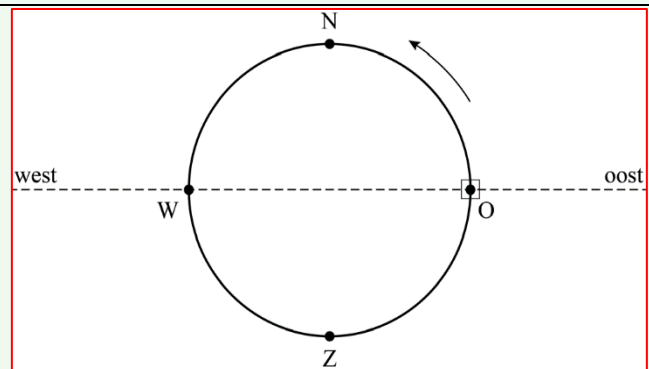


Achtergrondinformatie

Bron: Wikipedia

Draaiend Huis is een kunstwerk in Tilburg op de Hasseltrotonde. Het kunstwerk van John Körmeling bestaat uit een draaiend huis in het middengedeelte van de rotonde.

Wiskundig model



Figuur 1. Model van Draaiend Huis

Model voor Draaiend Huis

$$A = 30 \sin\left(\frac{\pi}{10} \cdot (t)\right)$$

De afstand A in meters van het huis tot de west-oost-as gedurende een rondgang over de rotonde. De straal van de cirkel waarover het huis beweegt, is 30 meter. Afstanden onder de west-oost-as worden als negatieve getallen weergegeven.

Probleemstelling 1

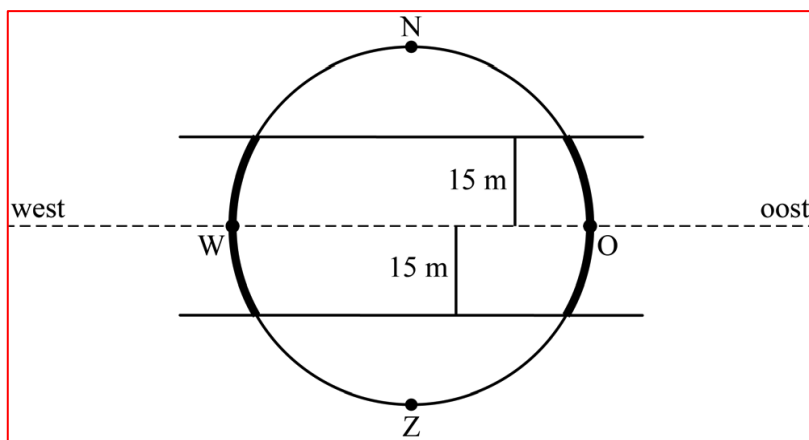
Je wilt weten wanneer het huis waar is.

Het model nader bekeken:

- Op een maandag staat het huis om acht uur 's morgens (08.00 uur) precies aan de oostkant van de rotonde. In het model: $t = 0$.
- Het huis draait tegen de klok in, in 20 uur rond de rotonde.

Opdrachten

1. Waar bevindt het huis zich op dezelfde maandag om 20.30 uur.
Gebruik de uitwerkbijlage en licht je antwoord toe.
2. Na hoeveel hele weken na tijdstip $t = 0$ bevindt het huis zich voor het eerst weer om 08.00 uur op maandag in punt O.
3. Bereken met behulp van het model hoeveel procent van de tijd het huis zich minder dan 15 meter van de west-oost-as bevindt.



Probleemstelling 2

Je kunt het model aanpassen zodat het beter bij een op te lossen probleem past.

Je kunt het model zó schrijven dat het beginpunt ($t = 0$) in het noorden, in punt N ligt. Het model heeft dan de volgende vorm:

$$y = 30 \sin\left(\frac{\pi}{10} \cdot (t - d)\right)$$

Opdracht

Bereken de waarde van d .

Mathematical Bridge



Achtergrondinformatie

Bron: Wikipedia

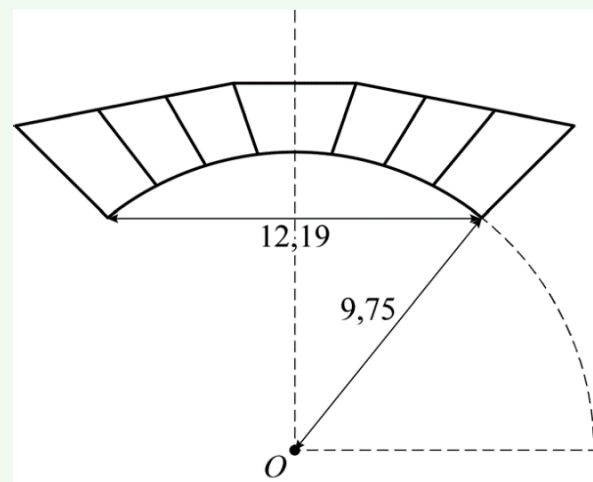
The **Mathematical Bridge** is the popular name of a wooden footbridge in the southwest of central Cambridge, United Kingdom. It bridges the River Cam about one hundred feet northwest of Silver Street Bridge and connects two parts of Queens' College. Its official name is simply the Wooden Bridge.

The bridge was designed by William Etheridge, and built by James Essex in 1749. It has been rebuilt on two occasions, in 1866 and in 1905, but has kept the same overall design. Although it appears to be an arch, it is composed entirely of straight timbers built to an unusually sophisticated engineering design, hence the name.

Het wiskundig model van de onderkant van de brug is gebaseerd op de standaardformule voor een cirkel met straal r en middelpunt $(0,0)$
 $x^2 + y^2 = r^2$

Van idee naar schets naar model

Schets:



Model:

$$H = \sqrt{95,0625 - d^2}$$

O is op de waterspiegel, H is de hoogte van de onderkant van de brug. H en d in meters.

Probleemstelling

Bij het gebruik van een wiskundig model zijn drie zaken van belang.

- 1) Het wiskundig model moet passend zijn bij de situatie.

En voor deze specifieke situatie

- 2) Wat zegt het model over de steilheid van de brug: wandelaars moeten makkelijk over de brug kunnen lopen.
- 3) Wat zegt het model over de maximale hoogte van de brug: gangbare vaartuigen moeten onder de brug door kunnen varen.

In plaats van de steilheid en de maximale hoogte te meten, gebruiken we een wiskundig model van de brug.

Opdrachten

1. Toon aan dat het wiskundig model past bij de schets en licht toe in welk opzicht het model afwijkt van de werkelijke situatie.
2. Bereken de maximale doorvaarthoogte aan het beginpunt van de brug en in het midden volgens het model.

Criterium

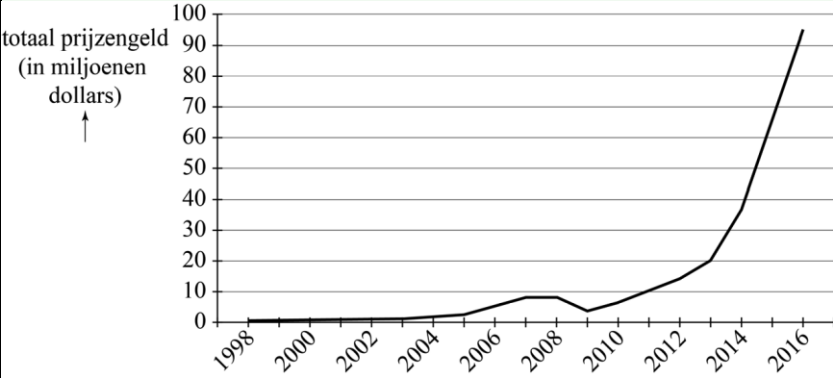
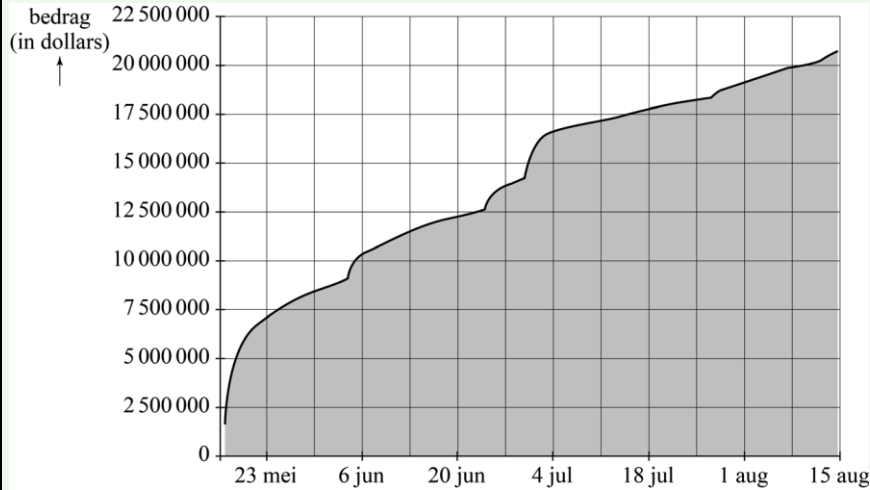
Een steilheid van minder dan 25% is nog goed te doen voor wandelaars.

3. Leg uit waarom de afgeleide waarde $H'(-1,90)$ een goede benadering van de steilheid van de loopbrug is en bereken of deze voldoet aan bovenstaand criterium.



**$(-1,90; 9,56)$ in
model**

The International

Achtergrondinformatie  2020 saw esports up its game in SO many ways <table border="1"><thead><tr><th>Year</th><th>Totaal prijzengeld (in miljoenen dollars)</th></tr></thead><tbody><tr><td>1998</td><td>0</td></tr><tr><td>2000</td><td>0</td></tr><tr><td>2002</td><td>0</td></tr><tr><td>2004</td><td>0</td></tr><tr><td>2006</td><td>2</td></tr><tr><td>2008</td><td>8</td></tr><tr><td>2010</td><td>5</td></tr><tr><td>2012</td><td>15</td></tr><tr><td>2014</td><td>35</td></tr><tr><td>2016</td><td>95.1</td></tr></tbody></table> figuur1. Totaal prijzengeld in dollars	Year	Totaal prijzengeld (in miljoenen dollars)	1998	0	2000	0	2002	0	2004	0	2006	2	2008	8	2010	5	2012	15	2014	35	2016	95.1	E-sports, is de term die wordt gebruikt voor het competitief spelen van computerspellen. In 1998 was het eerst officiële E-Sports toernooi. De prijzenpot was 100 000 dollar. In 2016 streden tienduizenden spelers in zo'n honderd verschillende spellen om een prijzenpot van ruim 95,1 miljoen dollar.
Year	Totaal prijzengeld (in miljoenen dollars)																						
1998	0																						
2000	0																						
2002	0																						
2004	0																						
2006	2																						
2008	8																						
2010	5																						
2012	15																						
2014	35																						
2016	95.1																						
 <table border="1"><thead><tr><th>Date</th><th>bedrag (in dollars)</th></tr></thead><tbody><tr><td>23 mei</td><td>2 500 000</td></tr><tr><td>6 jun</td><td>10 000 000</td></tr><tr><td>20 jun</td><td>12 500 000</td></tr><tr><td>4 jul</td><td>16 000 000</td></tr><tr><td>18 jul</td><td>17 500 000</td></tr><tr><td>1 aug</td><td>19 000 000</td></tr><tr><td>15 aug</td><td>20 500 000</td></tr></tbody></table> figuur 2. Prijzenpot The International 2016 in dollars	Date	bedrag (in dollars)	23 mei	2 500 000	6 jun	10 000 000	20 jun	12 500 000	4 jul	16 000 000	18 jul	17 500 000	1 aug	19 000 000	15 aug	20 500 000	The International is het belangrijkste toernooi in E-sports. In 2016 was de prijzenpot voor The International ruim 20 miljoen dollar. Het prijzengeld bij The International is crowd-funded: spelers dragen voorafgaand aan het toernooi bij aan de prijzenpot.						
Date	bedrag (in dollars)																						
23 mei	2 500 000																						
6 jun	10 000 000																						
20 jun	12 500 000																						
4 jul	16 000 000																						
18 jul	17 500 000																						
1 aug	19 000 000																						
15 aug	20 500 000																						

Probleemstelling

De ontwikkeling van de prijzenpot over de jaren heen en in een bepaald jaar kan benaderd worden met een model. Met die modellen kunnen voorspellingen gedaan worden of afwijkingen in het verloop nader bestudeerd worden.

Nadere gegevens

De totale prijzenpot nam van 2009 tot en met 2016 toe van 3,7 miljoen in 2009 toe tot 95,1 miljoen dollar in 2016. De aanname is dat deze groei exponentieel is en ook na 2016 exponentieel doorzet.

Opdracht

De ontwikkeling van het prijzengeld over de jaren

Bereken op basis van de gegevens uit 2009 en 2016 en de aanname in welk jaar het totale prijzengeld tot boven de 1 miljard dollar zal zijn is gestegen.

Nadere gegevens en model

De totale prijzenpot voor The International in augustus 2016 was als volgt opgebouwd:

- De ontwikkelaar van het spel, legt een bepaald startbedrag in de prijzenpot.
- De ontwikkelaar gaf de spelers van het spel vanaf 16 mei de mogelijkheid om virtuele voorwerpen te kopen die zij in het spel konden gebruiken. Van de opbrengsten daarvan werd 25% aan de prijzenpot toegevoegd.

De grafiek van het prijzengeld in 2016 kan benaderd worden met de volgende formule:

$$P = 8,157 \cdot \ln(0,1(t + 10)) + 1,6$$

In deze formule is P het totale prijzengeld in miljoenen dollars en t de tijd in dagen met $t = 0$ op 16 mei 2016.

Opdracht

Het model nader bekeken

Binnen een maand hadden de spelers 40 miljoen dollar uitgegeven aan virtuele voorwerpen. Bereken met op welke datum dat volgens het model het geval was.

Nadere gegevens

De toename van de totale prijzenpot niet regelmatig verliep. Dat kwam doordat de ontwikkelaar af en toe met speciale acties kwam om spelers te verleiden extra voorwerpen te kopen. Een van die acties was bijvoorbeeld op 30 juni. Op die dag groeide de prijzenpot met 1,125 miljoen dollar. Dat is een veel sterkere toename dan je op basis van de afgeleide van P mag verwachten.

Opdracht

Afwijkingen van het model

Bereken met behulp van differentiëren hoeveel keer zo groot de toename op 30 juni was dan je op basis van het model kan verwachten. Gebruik de afgeleide van P in je berekening.

///// *Wie bedenkt voor onderstaande een mooie visualisatie??*

Bijna de helft van het totale prijzengeld in E-Sports wordt gewonnen door spelers van één bepaald spel. Dit spel wordt gespeeld door twee teams van elk vijf spelers, waarbij elk van de spelers een eigen held bestuurt. De spelers proberen met hulp van door de computer bestuurde troepen het gebied van de tegenstander te veroveren.

Er zijn bij dit spel 112 verschillende helden, die worden onderverdeeld in drie categorieën: er zijn 49 aanvallers, 27 verdedigers en de overige helden zijn ondersteunende helden.

Aan het begin van het spel kiezen de teams volgens een gecompliceerd systeem beurtelings hun helden. Iedere held kan hierbij slechts één keer gekozen worden.

Het is gebruikelijk dat een team bestaat uit twee aanvallers, één verdediger en twee ondersteunende helden.

- 4p 14 Bereken hoeveel verschillende samenstellingen er mogelijk zijn van twee aanvallers, één verdediger en twee ondersteunende helden.

In elk team zitten vijf helden. Het spelgebied waarop de teams elkaar bestrijden kan globaal worden ingedeeld in drie zones: Noord, Midden en Zuid. Een held kan een rol krijgen in een van deze drie zones. Bovendien bestaat er de mogelijkheid om een held tussen de zones te laten wisselen; we noemen dat een zwervende held. Er zijn dus eigenlijk vier mogelijke rollen voor een held: Noord, Midden, Zuid en zwervend.

Teams kiezen er altijd voor om in elk van de drie zones ten minste één held te plaatsen. Een mogelijke verdeling van de aantallen helden is dan bijvoorbeeld: 1 held in Noord, 1 held in Midden, 2 helden in Zuid en 1 zwervende held. We gaan er hierbij vanuit dat het niet van belang is welke held in welke zone aanwezig is.

- 4p 15 Bereken hoeveel van zulke verdelingen er voor één team mogelijk zijn als elk van de zones Noord, Midden en Zuid ten minste één held moet bevatten.

Huurprijzen in New York

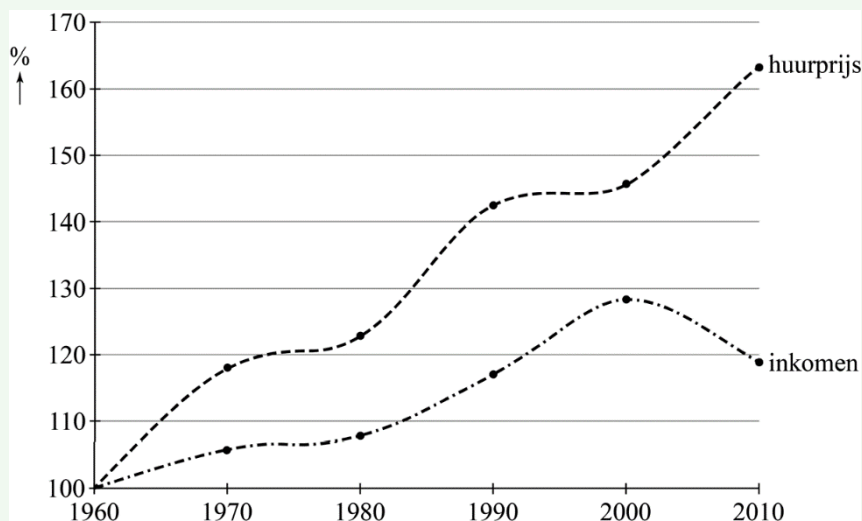


Achtergrondinformatie

New York is al decennialang een van de populairste steden ter wereld om te wonen met als gevolg dat de gemiddelde prijs van huurwoningen explosief gestegen is.

In 1970 bedroeg de gemiddelde huur van een woning in New York \$ 125 per maand. In 2013 was dat gestegen tot \$ 917 per maand. Dat is een toename van ruim 600%.

Zo'n vergelijking is echter niet helemaal eerlijk, want door inflatie verandert de waarde van geld. De reële gemiddelde huurstijging is de procentuele stijging van de gemiddelde huurprijzen gecorrigeerd voor inflatie.



Figuur 1. Reële gemiddelde stijging inkomen en huurwoningen in New York

In het vervolg van deze opgave zijn alle genoemde bedragen, getallen en percentages berekend met naar 2013-dollars omgerekende bedragen.

Verder spreken we in het vervolg van deze opgave over inkomen, huurprijs en huurlast, terwijl daar gemiddeld inkomen, gemiddelde huurprijs en gemiddelde huurlast bedoeld wordt.

Probleemstelling

Een belangrijke maatstaf om de betaalbaarheid van huurwoningen te onderzoeken is het percentage van het inkomen dat besteed wordt aan het betalen van de huur: de **huurlast**.

In 1960 bedroeg de huurprijs in New York \$ 561 en was de huurlast 15%.

De huurprijzen stijgen sneller dan de inkomens. Daarom neemt de huurlast steeds verder toe: van 15% in 1960 tot 21% in 2013. De aanname is dat de huurlast exponentieel is toegenomen sinds 1960 en dat die exponentiële stijging zich ook na 2013 voortzet.

Econoom Z. beweert dat grote problemen ontstaan wanneer de huurlast boven de 25% uitkomt.

Opdrachten

1. Bereken in welk jaar de huurlast volgens de veronderstelling van econoom Z. voor het eerst groter is dan 25%.

2. Hieronder staan twee uitspraken die gaan over de gegevens in de figuur:

A. In de periode 1960–1980 steeg de huurprijs sneller dan in de periode 1980–2000.

B. In de periode 1990–2000 daalde de huurlast

Leg voor elk van deze uitspraken uit of deze waar is of niet is.

Inkomensongelijkheid

Achtergrondinformatie

Wat is primaire Inkomen?

Het primair inkomen van een huishouden is de som van inkomen en vermogen van alle personen uit dat huishouden.

Als binnen een huishouden niemand betaald werk verricht of vermogen heeft, dan is het primair inkomen van dat huishouden gelijk aan nul.

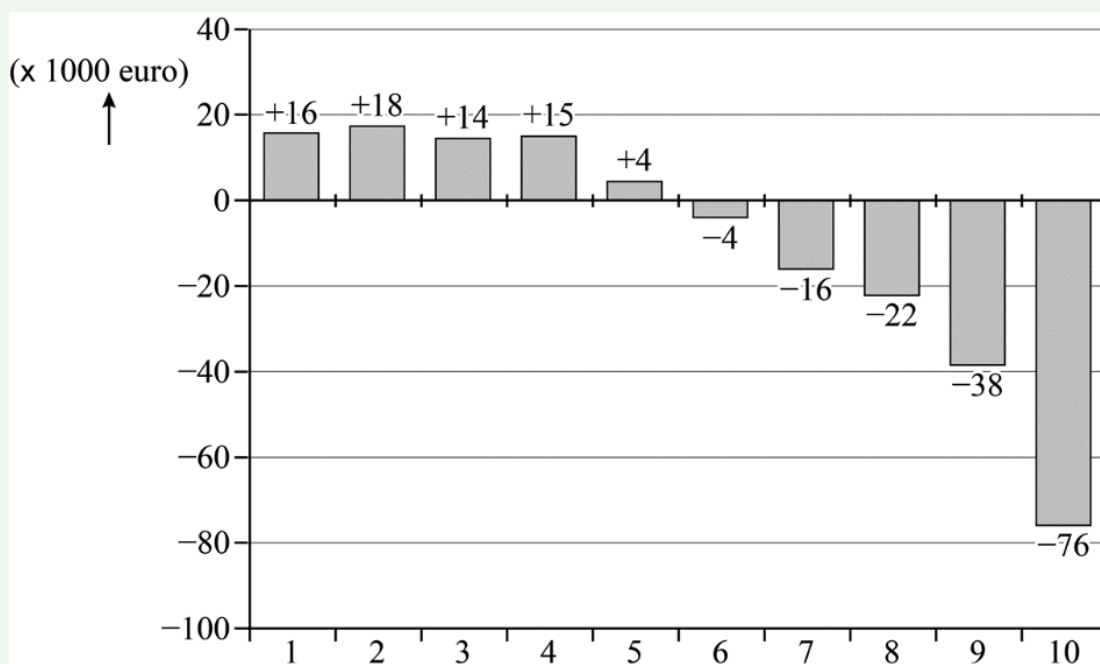
Wat is het secundaire Inkomen?

Secundair inkomen is primair inkomen plus alle ontvangen uitkeringen verminderd met betaalde belastingen.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
aandeel primair inkomen (%)	0	0	1	3	5	8	12	16	20	35
aantal huishoudens (x 1000)	784	769	776	777	777	777	777	777	777	776
aantal personen (x 1000)	1138	1041	1234	1330	1466	1597	1851	2155	2381	2535

Tabel 1. Primair inkomen

Huishoudens op basis van **primair inkomen** verdeeld in tien ongeveer even grote groepen. De eerste groep bevat de huishoudens met de laagste primaire inkomens en de tiende groep bevat huishoudens met de hoogste primaire inkomens.



Figuur 1. Secundair inkomen min primair inkomen per groep huishoudens

Achtergrondinformatie nader bekeken

In de tabel kun je zien dat de groep met de hoogste **primaire inkomens** 776 000 huishoudens bevat en uit 2 535 000 personen bestaat.

Van het totale primair inkomen van 376,3 miljard euro is 35% van deze groep. Dit is 131,705 miljard euro.

In de figuur kun je zien dat het secundair inkomen per huishouden in de eerste vijf groepen hoger is dan het primair inkomen.

Er is dan een hoger bedrag aan uitkeringen ontvangen dan er aan belasting is betaald.

Om berekeningen te kunnen maken is ook het volgende nog van belang:

In 2014 bedroeg het totale primaire inkomen van alle huishoudens in Nederland 376,3 miljard euro, het totaal aantal huishoudens 7,8 miljoen met 16,7 miljoen personen.

Probleemstelling en model

Inkomensongelijkheid is een belangrijk politiek thema.

Een model **S** voor inkomensongelijkheid is als volgt gedefinieerd:

S is het gemiddelde inkomen per persoon in de tiende groep min het gemiddeld inkomen per persoon in de eerste groep.

Opdrachten

1. Laat zien dat de inkomensongelijkheid **S** bij het **primair inkomen** ongeveer 51 955 euro is.

Door de uitkeringen en belastingen is de inkomensongelijkheid **S** bij het secundair inkomen kleiner dan bij het primair inkomen.

2. Onderzoek of het verschil tussen de inkomensongelijkheid **S** van het primaire en secundaire inkomen meer of minder dan 30 000 is.